

# MATEMATIKA 1

## LEKCIJA 5

### 3 - L 5.1 POJAM FUNKCIJE

#### Definicija funkcije

*Funkcija* (ili *preslikavanje*) — uređena trojka  $(X, Y, f)$ , gde su  $X$  i  $Y$  neki neprazni skupovi, a  $f$  neko pravilo po kom se svakom elementu  $x$  skupa  $X$  dodeljuje po jedan element  $y = f(x)$  skupa  $Y$ . Pritom se  $X$  naziva *domenom* (ili *oblašću definisanosti*), a  $Y$  *kodomonom* (ili *skupom vrednosti*) te funkcije. Ako je  $x \in X$ , tada se  $x$  naziva *originalom* (ili *vrednošću nezavisno promenljive* ili *vrednošću argumenta*), a  $f(x)$  se naziva *slikom* (ili *vrednošću funkcije*). Obično se funkcija  $(X, Y, f)$  navodi skraćeno kao  $f$ , i piše se  $f : X \rightarrow Y$  ("funkcija  $f$  preslikava skup  $X$  u skup  $Y$ "). Uobičajena oznaka domena (kodomena) funkcije  $f$  —  $D_f$ , ili  $D$ ,  $(R_f$ , ili  $R)$ .

*Jednakost funkcija.* Za funkcije  $(X_1, Y_1, f_1)$  i  $(X_2, Y_2, f_2)$  kaže se da su *jednake*, i piše  $(X_1, Y_1, f_1) = (X_2, Y_2, f_2)$  ili, skraćeno,  $f_1 = f_2$ , ako je  $X_1 \equiv X_2$  i pravila  $f_1$  i  $f_2$  su istovetna.

*Graf* (ili *grafik*) *funkcije*  $(X, Y, f)$  — skup  $\Gamma_f$  svih uređenih parova oblika  $(x, f(x))$ ,  $x \in X$ .

*Slika skupa*  $A \subset X$  *pri preslikavanju*  $(X, Y, f)$  —  $f(A) := \{y : y \in Y \wedge (\exists x \in A)(f(x) = y)\}$ . Specijalno,  $f(X)$  se naziva *područjem vrednosti* (ili *pravim skupom vrednosti*) funkcije  $f$ .

*Inverzna slika skupa*  $B \subset Y$  *pri preslikavanju*  $(X, Y, f)$  —  $f^{-1}(B) := \{x : x \in X \wedge f(x) \in B\}$ .

*Sirjekcija* (ili *preslikavanje "na"*) — funkcija  $(X, Y, f)$  za koju je  $f(X) \equiv Y$ .

*Injekcija* (ili *preslikavanje "1-1"*, ili *uzajamno jednoznačno preslikavanje*) — funkcija  $(X, Y, f)$  takva da međusobno različiti originali  $x_1$  i  $x_2$  uvek imaju međusobno različite slike  $f(x_1)$  i  $f(x_2)$ , tj.  $x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , ili  $x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

*Bijekcija* — funkcija koja je istovremeno sirjekcija i injekcija.

*Restrikcija* (ili *suženje*) funkcije  $(X, Y, f)$  na skup  $A \subset X$  — funkcija  $(A, U, f/A)$ , pri čemu je  $U \subset Y$  i  $f/A$  pravilo  $f$  ali samo za elemente skupa  $A$ .

*Produženje funkcije*  $(X, Y, f)$  na skup  $A \supset X$  — funkcija  $(A, U, g)$  takva da je  $(X, Y, f)$  restrikcija te funkcije na skup  $X$ .

### Definicija složene funkcije

Neka su  $(X, U, f)$  i  $(U, Y, g)$  neke funkcije. Kaže se da je funkcija  $(X, Y, h)$  složena od (ili *kompozicija*) funkcija  $(X, U, f)$  i  $(U, Y, g)$ , ako je  $h$  pravilo po kom se svakom elementu  $x$  skupa  $X$  dodeljuje element  $g(f(x))$  skupa  $Y$ . Oznaka —  $h = g \circ f$ . Na ovaj način uvedena operacija komponovanje (ili kompozicija) funkcija ima *svojstvo asocijativnosti*: ako su  $f, g$  i  $h$  neke funkcije takve da postoje složene funkcije  $g \circ f$  i  $h \circ g$ , tada je  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

### Definicija inverzne funkcije

*Identičnim preslikavanjem skupa  $X$*  naziva se preslikavanje  $(X, X, I_X)$ , pri čemu je  $I_X$  pravilo po kom se svakom  $x \in X$  dodeljuje  $x$ . *Inverzna funkcija* funkcije  $(X, Y, f)$  — funkcija  $(f(X), X, g)$  takva da je  $g \circ f = I_X$ . Oznaka —  $g = f^{-1}$ . Uslov da postoji inverzna funkcija  $f^{-1}$  funkcije  $f$  jeste da  $f$  bude injekcija. *Svojstva invertovanja funkcije*:

**1<sup>0</sup>** ako je  $f$  bijekcija, onda je  $(f^{-1})^{-1} = f$ ;

**2<sup>0</sup>** ako su  $f$  i  $g$  bijekcije takve da postoji  $g \circ f$ , tada je  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

## 3 - L 5.2 OSNOVNE ELEMENTARNE REALNE FUNKCIJE

### Realne funkcije jedne realne nezavisno promenljive

*Realna funkcija jedne realne nezavisno promenljive* — svaka funkcija  $(D, \mathbb{R}, f)$  kod koje je  $D \subset \mathbb{R}$ . Skraćeni naziv — realna funkcija.

Ako se realna funkcija zada samo analitičkim izrazom, podrazumeva se da je njen domen skup svih realnih brojeva za koje taj izraz ima realne vrednosti.

*Grafik realne funkcije*  $(D, \mathbb{R}, f)$  — skup svih tačaka  $(x, y)$  u ravni  $Oxy$  za koje je  $x \in D$  i  $y = f(x)$ . *Teorema*: Ako je  $f^{-1}$  inverzna funkcija realne funkcije  $f$ , tada su grafici ovih funkcija (u ravni  $Oxy$ ) uzajamno simetrični u odnosu na pravu  $y = x$ . Dokaz-samostalno.

*Zbir dve realne funkcije*  $f$  i  $g$  — realna funkcija  $f + g$  čiji domen je  $D_f \cap D_g$  i koja je takva da je  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $x \in D_f \cap D_g$ . Uslov da postoji  $f + g$  —  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ .

*Proizvod dve realne funkcije*  $f$  i  $g$  — realna funkcija  $fg$  čiji domen je  $D_f \cap D_g$  i koja je takva da je  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ,  $x \in D_f \cap D_g$ . Uslov da  $fg$  postoji —  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ .

*Količnik* realne funkcije  $f$  i realne funkcije  $g$  — realna funkcija  $\frac{f}{g}$  čiji je domen  $D_f \cap D_g \setminus g^{-1}(\{0\})$  i koja je takva da je  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $x \in D_f \cap D_g \setminus g^{-1}(\{0\})$ . Uslov da  $\frac{f}{g}$  postoji —  $D_f \cap D_g \setminus g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ .

### Ograničenost, monotonost, periodičnost, parnost, konveksnost realne funkcije

*Realna funkcija  $f$  ograničena odozgo (odozdo)* — ako postoji  $g \in \mathbb{R}$  ( $d \in \mathbb{R}$ ) takav da je  $f(x) \leq g$  ( $d \leq f(x)$ ) za svako  $x \in D_f$ , tj. ako je skup  $R_f$  ograničen odozgo (odozdo). *Realna funkcija ograničena* — ako je ograničena odozgo i ograničena odozdo. Lako je videti da važi:  $f$  ograničena  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq k$ ,  $x \in D_f$ . *Realna funkcija  $f$  ograničena (odozgo) (odozdo) na skupu  $A \subset D_f$  ( $A \neq \emptyset$ )* — ako je restrikcija  $f/A$  ograničena (odozgo) (odozdo).

*Supremum (infimum) realne funkcije  $f$*  —  $\sup R_f$  ( $\inf R_f$ ). Oznaka —  $\sup f(x)$  ( $\inf f(x)$ ). *Maksimum (minimum) funkcije  $f$*  —  $\sup f(x)$  ( $\inf f(x)$ ) u slučaju kad  $\sup f(x)$  ( $\inf f(x)$ ) pripada području vrednosti  $R_f$  ("funkcija  $f$  dostiže svoj supremum (infimum)"). *Maksimum (minimum) funkcije  $f$  na skupu  $A \subset D_f$  ( $A \neq \emptyset$ )* — maksimum (minimum) restrikcije  $f/A$ . Oznaka —  $\max_{x \in A} f(x)$  ( $\min_{x \in A} f(x)$ ). *Okolina tačke  $x_0$  na brojevnoj osi* — svaki podskup  $V$  tačaka brojevnose koje obuhvata neki interval  $(a, b)$  takav da je  $x_0 \in (a, b)$ . *Funkcija  $f$  ima lokalni maksimum (minimum)* u tački  $x_0 \in D_f$  — ako postoji okolina  $V \subset D_f$  tačke  $x_0$  takva da je  $f(x_0) = \max_{x \in V} f(x)$  ( $\min_{x \in V} f(x)$ ). Tada se  $x_0$  naziva *tačkom lokalnog maksimuma (minimuma)* funkcije  $f$ . *Lokalni ekstrem funkcije* — lokalni maksimum ili lokalni minimum.

*Realna funkcija  $f$  monotono rastuća (opadajuća) (neopadajuća) (nerastuća)* — ako je  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) ( $f(x_1) \leq f(x_2)$ ) ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ) za svake dve tačke  $x_1, x_2$  iz domena  $D_f$  takve da je  $x_1 < x_2$ . *Monotonost funkcije na podskupu* domena definiše se preko restrikcije. *Teorema:* Ako je funkcija  $f$  monotono rastuća (opadajuća), tada ona ima inverznu funkciju i  $f^{-1}$  je takođe monotono rastuća (opadajuća). Dokaz — samostalno.

*Realna funkcija  $f$  periodična* — ako postoji  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ , takav da je  $D_f + \omega \subset D_f$  i da je  $f(x + \omega) = f(x)$ ,  $x \in D_f$ . ( $D_f \pm \omega = \{x \pm \omega : x \in D_f\}$ .) Svaki takav broj  $\omega$  naziva se *periodom funkcije  $f$* . Ako je  $\omega$  neki period

funkcije  $f$ , tada je svaki broj oblika  $k\omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , takođe period funkcije  $f$ . Ako je  $\omega$  period funkcije  $f$  i  $D_f - \omega \subset D_f$ , tada je svaki broj oblika  $k\omega$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , period funkcije  $f$ . *Osnovni period* periodične funkcije  $f$  — najmanji pozitivni period funkcije  $f$ , ako takav postoji.

*Parna (neparna) funkcija* — realna funkcija  $f$  za koju je  $-D_f \subset D_f$  i  $f(-x) = f(x)$  ( $-f(x)$ ),  $x \in D_f$ . ( $-D_f = \{-x : x \in D_f\}$ .) *Teorema*: Grafik parne (neparne) funkcije u ravni  $Oxy$  je simetričan u odnosu na  $y$ -osu (koordinatni početak  $O$ ). *Dokaz* — samostalno. *Teorema*: Ako je  $-D_f \subset D_f$ , tada se realna funkcija  $f$  može predstaviti kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije, i to na samo jedan način. *Dokaz* — samostalno.

*Konveksna (konkavna) funkcija* na intervalu  $I$  — realna funkcija  $f$  definisana na intervalu  $I$  i takva da je  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq (\geq) \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$  za svake dve tačke  $x_1$  i  $x_2$  intervala  $I$  i za svaka dva pozitivna broja  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  sa zbirom jednakim 1:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Ako u definicionoj nejednakosti stoji znak " $<$ " (" $>$ ") umesto " $\leq$ " (" $\geq$ "), onda je funkcija  $f$  *strogo konveksna* (*konkavna*) na intervalu  $I$ . Umesto "konveksna" ("konkavna") nekad se govori "konveksna naniže" ("konveksna naviše"). Lako je videti da važi: (i)  $f$  konveksna  $\Leftrightarrow -f$  konkavna; (ii)  $f_1$  i  $f_2$  konveksne (konkavne)  $\Rightarrow f_1 + f_2$  konveksna (konkavna). *Geometrijska interpretacija*: Ako je funkcija strogo konveksna (konkavna) na intervalu  $I$ , onda, za svake dve tačke  $x_1$  i  $x_2$  intervala  $I$  takve da je  $x_1 < x_2$ , deo grafika funkcije  $f$  nad intervalom  $(x_1, x_2)$  leži ispod (iznad) sečice kroz tačke grafika sa apscisama  $x_1$  i  $x_2$ . *Dokaz* — na vežbama (AG).

### Pregled osnovnih elementarnih realnih funkcija

*Polinomi (polinomne funkcije)*. *Polinom* —  $p : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ;  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $a_n \neq 0$ ; st  $p = n$ .

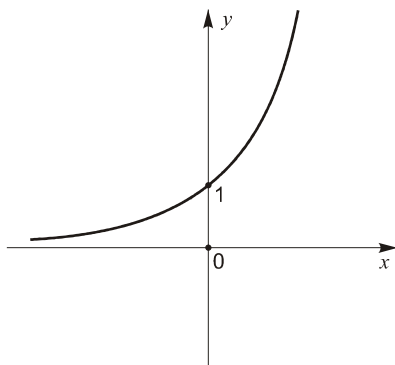
*Stepene funkcije*. *Stepena funkcija* sa izložiocem  $\alpha$  —  $f : x \mapsto x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Racionalne funkcije*. *Racionalna funkcija* — količnik dva polinoma.

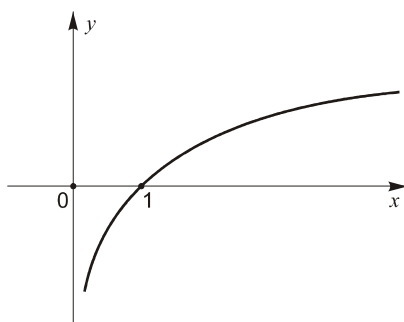
*Algebarske funkcije*. *Algebarska funkcija* — funkcija  $y = f(x)$  koja zadovoljava neku algebarsku jednačinu  $p(x, y) = 0$ ,  $p$  — polinom po  $x$  i  $y$ , ali ne svaka takva funkcija, već samo ona kod koje se za svako  $x \in D_f$  vrednost  $f(x)$  dobija primenom (jednog istog) konačnog niza operacija sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje i stepenovanje racionalnim brojem.

*Eksponencijalne funkcije*. *Eksponencijalna funkcija* sa osnovom  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) —  $f : x \mapsto a^x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = \mathbb{R}^+$ . Za  $a > 1$  funkcija strogo rastuća,

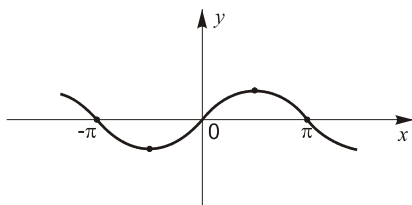
za  $a < 1$  strogo opadajuća.



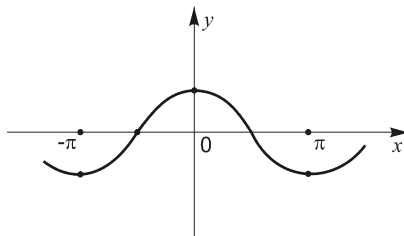
*Logaritamske funkcije.* Logaritamska funkcija sa osnovom  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) —  $f : x \mapsto \log_a x$ .  $D_f = \mathbb{R}^+$ ,  $R_f = \mathbb{R}$ . Za  $a > 1$  funkcija strogo rastuća, a za  $a < 1$  strogo opadajuća.



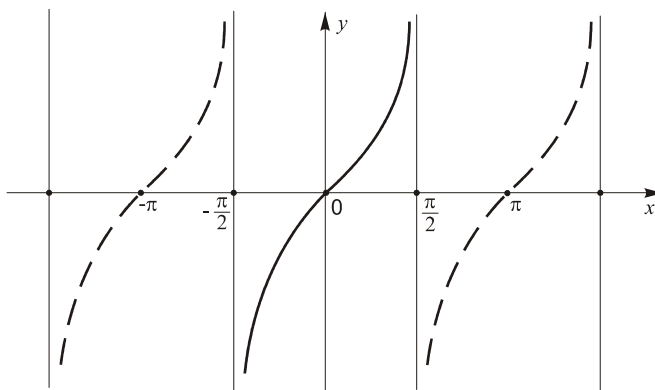
*Trigonometrijske funkcije.* Sinusna funkcija —  $f : x \mapsto \sin x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = [-1, 1]$ , periodična, sa periodom (osnovnim)  $2\pi$ .



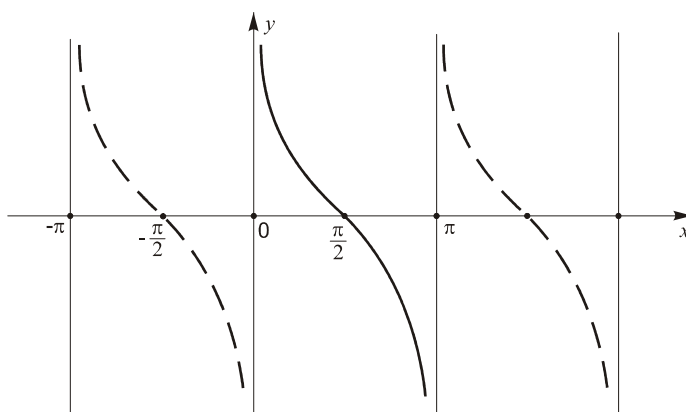
*Kosinusna funkcija* —  $f : x \mapsto \cos x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = [-1, 1]$ , periodična, sa periodom (osnovnim)  $2\pi$ .



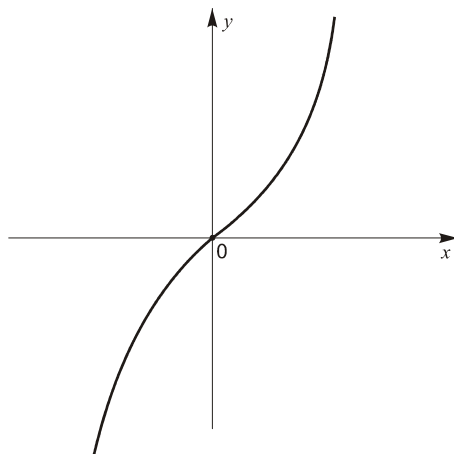
*Tangensna funkcija* —  $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$ .  $D_f = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ ,  $R_f = \mathbb{R}$ , periodična, sa periodom (osnovnim)  $\pi$ .



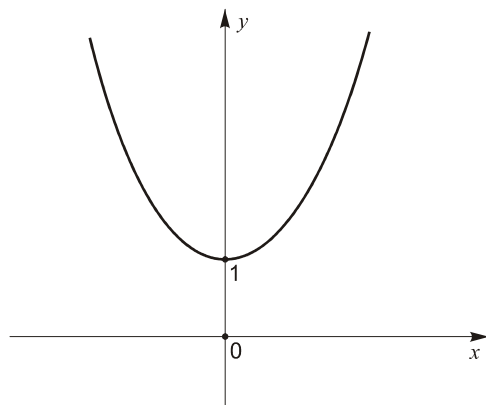
*Kotangensna funkcija* —  $f : x \mapsto \operatorname{ctg} x$ .  $D_f = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ ,  $R_f = \mathbb{R}$ , periodična, sa periodom (osnovnim)  $\pi$ .



*Hiperboličke funkcije. Sinus hiperbolički* —  $f : x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .  
 $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = \mathbb{R}$ , strogo rastuća.

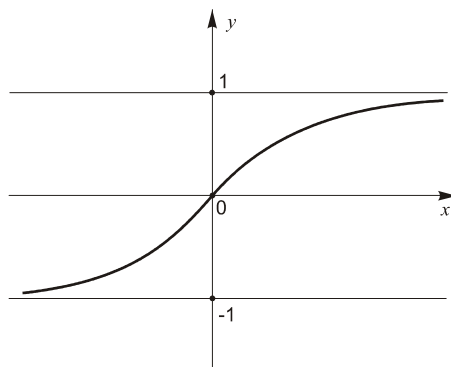


*Kosinus hiperbolički* —  $f : x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = [1, +\infty)$ .  
 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .

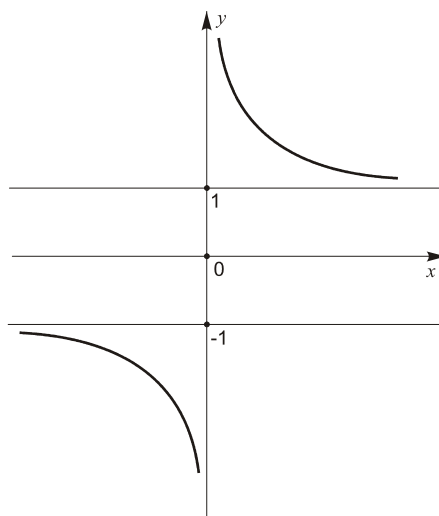


*Tangens hiperbolički* —  $f : x \mapsto \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = (-1, 1)$ , strogo

rastuća.



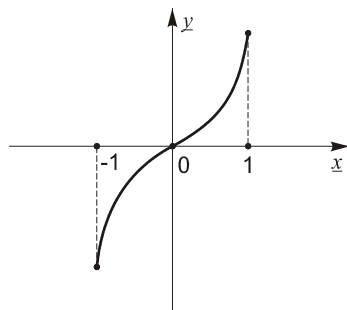
*Kotangens hiperbolički* —  $f : x \mapsto \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ .  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , strogo opadajuća na svakom od intervala  $(-\infty, 0)$  i  $(0, +\infty)$ .



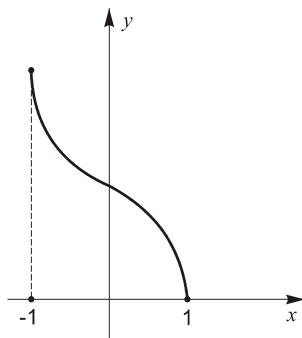
*Ciklometrijske funkcije. Arkus-sinus* —  $f : x \mapsto \arcsin x$ .  $D_f = [-1, 1]$ ,



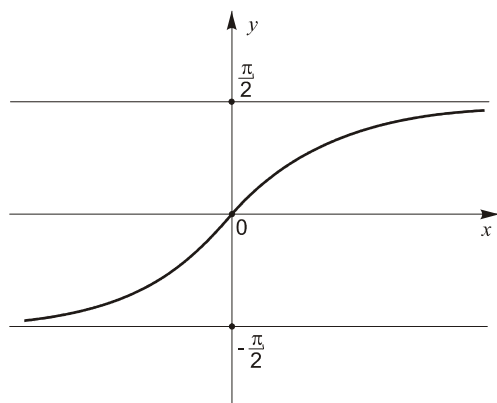
$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , stromo rastuća.



*Arkus-kosinus* —  $f : x \mapsto \arccos x$ .  $D_f = [-1, 1]$ ,  $R_f = [0, \pi]$ , stromo opadajuća.

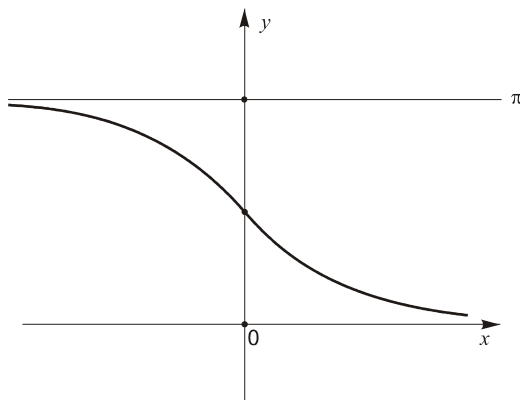


*Arkus-tangens* —  $f : x \mapsto \operatorname{arctg} x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , stromo rastuća.



*Arkus-kotangens* —  $f : x \mapsto \operatorname{arcctg} x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = (0, \pi)$ , stromo opada-

juća.



*Klasa osnovnih elementarnih realnih funkcija* — polinomi, stepene funkcije, racionalne funkcije, algebarske funkcije, eksponencijalne funkcije, logaritamske funkcije, trigonometrijske funkcije, hiperboličke funkcije, ciklometrijske funkcije. *Klasa elementarnih realnih funkcija* — najuži skup funkcija sa svojstvima:

- (i) sadrži sve osnovne elementarne funkcije;
- (ii) ako sadrži neke dve funkcije, onda sadrži i njihov zbir, proizvod, količnike, ukoliko postoje;
- (iii) ako sadrži neke dve funkcije, onda sadrži i njihove kompozicije, ukoliko postoje;
- (iv) ako sadrži neku funkciju, onda sadrži i njenu inverznu, ukoliko postoji.

### 3 - L 5.3 GRANIČNA VREDNOST REALNE FUNKCIJE

#### Definicija granične vrednosti realne funkcije u datoj tački

*Bazična okolina tačke*  $a \in \mathbb{R}$  — svaki interval oblika  $(a - r, a + r)$ ,  $r > 0$ . ( $r$  — poluprečnik bazične okoline). Oznaka —  $B[a, r]$ . *Punktirana bazična okolina tačke*  $a \in \mathbb{R}$  —  $B[a, r] \setminus \{a\}$ . Oznaka —  $B(a, r)$ . *Tačka nagomilavanja skupa*  $D \subset \mathbb{R}$  — tačka  $a \in \mathbb{R}$  takva da u svakoj njenoj punktiranoj bazičnoj okolini ima tačaka iz  $D$ . Oznaka skupa svih tačaka nagomilavanja skupa  $D$  —  $D'$ .

*Definicija preko okolina:* *Granična vrednost (ili limes) realne funkcije*  $f$  u tački  $a \in D'_f$  — broj  $l$  takav da za svaku bazičnu okolinu  $B[l, \varepsilon]$  tačke  $l$  postoji punktirana bazična okolina  $B(a, \delta)$  tačke  $a$ , takva da je  $f(B(a, \delta) \cap D_f) \subset B[l, \varepsilon]$ .

$B[l, \varepsilon)$ . Definicija "na jeziku  $\varepsilon - \delta$ ": Granična vrednost (ili limes) realne funkcije  $f$  u tački  $a \in D'_f$  — broj  $l$  takav da za svaki pozitivni broj  $\varepsilon$  postoji pozitivni broj  $\delta$ , takav da

$$x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Oznaka —  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Ako  $a = +\infty$  ( $-\infty$ ), onda u gornjoj definiciji treba dvostruka nejednakost da se zameni nejednakošću " $x > \Delta$ " (" $x < \Delta$ "), gde je  $\Delta > 0$  ( $\Delta < 0$ ). Definicija beskonačnog limesa — u gornjoj definiciji nejednakost " $|f(x) - l| < \varepsilon$ " zameniti nejednakošću " $f(x) > E$ " (" $f(x) < E$ "), gde je  $E > 0$  ( $E < 0$ ). Oznaka —  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ ).

### Osnovna pravila o graničnim vrednostima

*Teorema.* Neka funkcije  $f$  i  $g$  imaju granične vrednosti  $l$  i  $m$  u tački  $a$  i neka je  $D_f = D_g$ . Tada:  $1^0$  postoji granična vrednost  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ , i jednaka je  $l + m$ ;  $2^0$  postoji granična vrednost  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ , i jednaka je  $lm$ ;  $3^0$  ako je  $m \neq 0$  postoji granična vrednost  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  i jednaka je  $\frac{l}{m}$ . Dokaz — na vežbama (AG).

*Teorema (o tri funkcije).* Neka su  $f, g, h$  realne funkcije definisane na skupu  $D$  i neka je  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ,  $x \in D$ . Ako postoje granične vrednosti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ , i jednake su  $l$ , tada postoji i granična vrednost  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  i jednaka je  $l$ . Dokaz — na vežbama (AG).

### Leva i desna granična vrednost

*Leva (desna) granična vrednost funkcije  $f$  u tački  $a$*  — granična vrednost u tački  $a$  njene restrikcije  $f/A$  na skup  $A = (-\infty, a) \cap D_f$  ( $(a, +\infty) \cap D_f$ ).

Oznaka —  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ , ili  $f(a-)$   $\left( \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \text{ ili } f(a+) \right)$ .

*Teorema.* Neka je  $f$  realna funkcija takva da u svakom od intervala  $(a - r, a)$  i  $(a, a + r)$ , za svaki  $r > 0$ , ima tačaka iz  $D_f$ . Tada  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  postoji ako i samo ako postoje  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  i jednaki su. Pritom je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ . Dokaz — samostalno.

### Neki osnovni limesi

$$1^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$2^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dokazi — na vežbama.

### Granična vrednost niza

*Beskonačni niz (realnih brojeva)* — realna funkcija  $f$  za koju je  $D_f = \mathbb{N}$ . Oznaka —  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ili  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ , gde je  $a_n = f(a_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

*Granična vrednost niza*  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ ,  $(a_n = f(a_n))$  —  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . *Definicija preko okolina*: Broj  $l$  je granična vrednost niza  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$  ako se u svakoj baz-  
ičnoj okolini tačke  $l$  nalaze svi njegovi članovi izuzev najviše konačno mnogo. *Definicija "na jeziku  $\varepsilon - k$ "*: Broj  $l$  je granična vrednost niza  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$  ako za svaki pozitivni broj  $\varepsilon$  postoji prirodni broj  $k$  takav da

$$n \geq k \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Oznaka —  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . *Konvergentan (divergentan) niz* — niz koji ima (nema) graničnu vrednost. *Određeno divergentan niz* — niz koji teži  $+\infty$  ili  $-\infty$ .

*Teorema (o konvergenciji monotonog niza)*. Svaki (beskonačni) ograničen i monoton niz je konvergentan. Ako raste (opada) njegova granična vrednost je njegov supremum (infimum). Dokaz — na vežbama (AG).

*Teorema (Košijev princip konvergencije niza)*. Niz  $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$  je konvergentan ako i samo ako za svaki pozitivni broj  $\varepsilon$  postoji prirodni broj  $k$  takav da

$$n \geq k \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Dokaz — na vežbama (AG).

Niz  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , je ograničen i monoton. Dokaz — na vežbama (AG). *Definicija broja  $e$* :

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

( $e = 2.718281828459\dots$ )  $\ln a := \log_e a$ ,  $a > 0$ .

**Osnovni limesi povezani sa brojem  $e$** 

$$3^0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$4^0 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$5^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$6^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$7^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

$$8^0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dokazi — na vežbama.